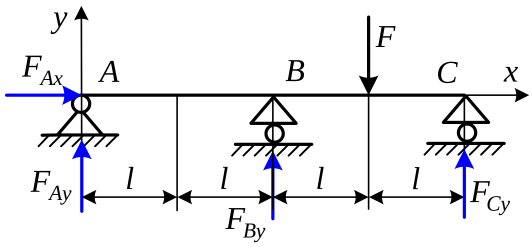
14. MECHANIKA-SZILÁRDSÁGTAN GYAKORLAT

(kidolgozta: Tarnai Gábor mérnöktanár.)

14.1. Statikailag határozatlan tartó igénybevételeinek meghatározása: (Castigliano tétel)



Adott:

$l = 2\ \text{m}$,

$F = 32\ \text{kN}$,

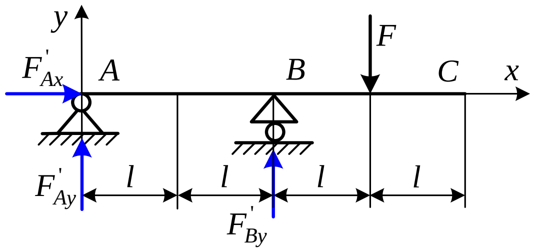
$I_z = 50\,000\ \text{mm}^4$,

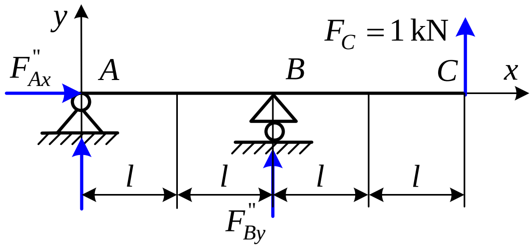
$E = 2{,}1 \cdot 10^5\ \dfrac{\text{N}}{\text{mm}^2}$.

Statikai ismeretlenek: F_{Ax}, F_{Ay}, F_{By}, F_{Cy}. Statikai egyenletek száma: 3 db.
A tartó statikailag egyszeresen határozatlan.

Feladat: Határozza meg a tartó támasztó erőrendszerét!

Megoldás:
a) Statikailag határozottá tétel:



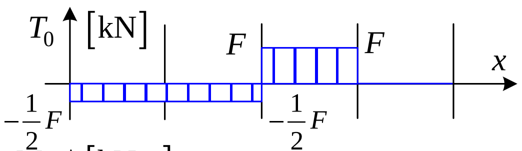


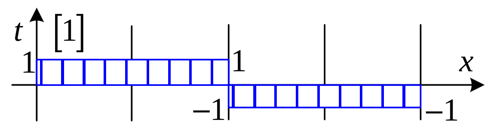
támasztó erőrendszer:

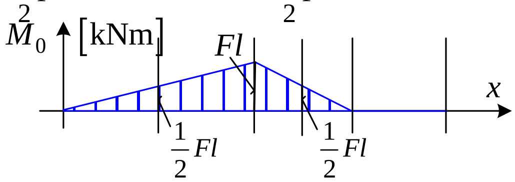
$$M_a = 0 = 2lF'_{By} - 3lF$$
$$F'_{By} = \frac{3}{2}F\ (\uparrow)$$
$$M_b = 0 = -2lF'_{Ay} - lF$$
$$F'_{Ay} = -\frac{1}{2}F\ (\downarrow)$$
$$F_x = 0 \quad \Rightarrow \quad F'_{Ax} = 0$$

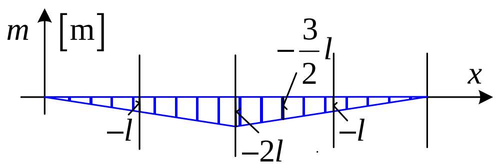
$$M_a = 0 = 2lF''_{By} + 4l \cdot F_C$$
$$F''_{By} = -2F_C = -2kN\ (\downarrow)$$
$$M_b = 0 = -2lF''_{Ay} + 2lF_C$$
$$F''_{Ay} = F_C = 1kN\ (\uparrow)$$
$$F_x = 0 \quad \Rightarrow \quad F''_{Ax} = 0$$

igénybevételi ábrák:









b) Kinematikai előírás: $v_c = 0$ (Castigliano-tétel)

$$v_c = \frac{\partial U}{\partial F_{Cy}} = 0, \qquad U = \frac{1}{2}\int_{(4l)} \frac{\left(M_0 + F_{Cy} m\right)^2}{I_z E} dx, \qquad \text{(a nyírási energiát elhanyagoljuk)}$$

$$v_c = \frac{\partial U}{\partial F_{Cy}} = \frac{1}{I_z E}\int_{(4l)} \left(M_0 + F_{Cy} m\right) m\, dx = \frac{1}{I_z E}\left[\int_{(4l)} M_0 m\, dx + F_{Cy}\int_{(4l)} m^2 dx\right] \Rightarrow \qquad F_{Cy} = -\frac{\int M_0 m\, dx}{\int m^2\, dx}$$

Integrálok kiszámítása:

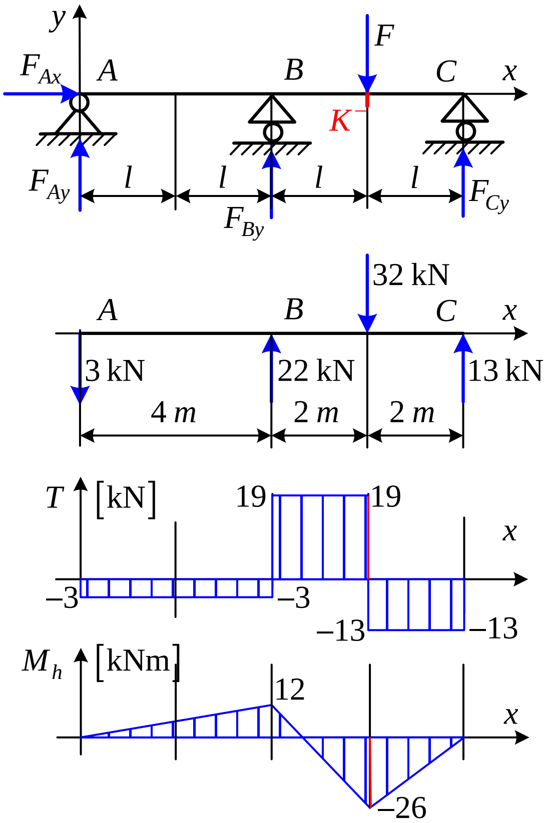
$$\int_{(4l)} M_0 m\, dx = \frac{2l}{6}\left[0\cdot 0 + 4\left(\frac{Fl}{2}\right)(-l) + (Fl)(-2l)\right] + \frac{l}{6}\left[(Fl)(-2l) + 4\left(\frac{Fl}{2}\right)\left(-\frac{3}{2}l\right) + 0\cdot(-l)\right] +$$

$$+\frac{l}{6}\left[0\cdot(-l) + 4\cdot 0\cdot\left(-\frac{1}{2}l\right) + 0\cdot 0\right] = -\frac{8l^3}{6}F - \frac{5l^3}{6}F + 0 = -\frac{13l^3}{6}F$$

$$\int_{(4l)} m^2 dx = \frac{2l}{6}\left[0 + 4(-l)^2 + (-2l)^2\right] + \frac{2l}{6}\left[(-2l)^2 + 4(-l)^2 + 0\right] = \frac{32l^3}{6}$$

$$\Rightarrow \qquad F_{Cy} = -\frac{\int M_0 m\, dx}{\int m^2\, dx} = -\frac{-\frac{13l^3}{6}F}{\frac{32l^3}{6}} = +\frac{13}{32}F\,(\uparrow) \Rightarrow \qquad F_{Cy} = \frac{13}{32}32 = 13\text{ kN}\,(\uparrow).$$

c) A hiányzó támasztó erők meghatározása



$F_x = 0 \quad \Rightarrow \quad F_{Ax} = 0.$

$M_a = 0 = 2lF_{By} - 3lF + 4lF_{Cy}$

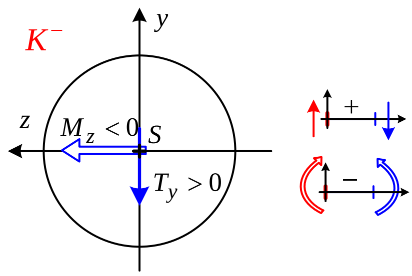
$\Rightarrow \quad F_{By} = \dfrac{3F - 4F_{Cy}}{2} = 22\text{ kN}\,(\uparrow).$

$M_b = 0 = -2lF_{Ay} - lF + 2lF_{Cy}$

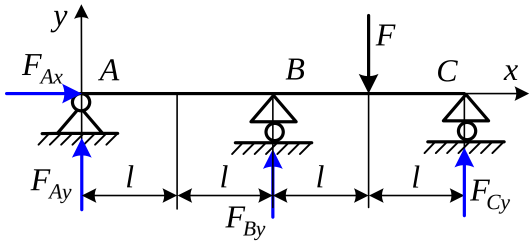
$\Rightarrow \quad F_{Ay} = \dfrac{-F + 2F_{Cy}}{2} = -3\text{ kN}\,(\downarrow).$

d) Veszélyes keresztmetszet: K^-

$T_{yK^-} = +19\,kN, \; M_{hzK^-} = -26\,kNm.$



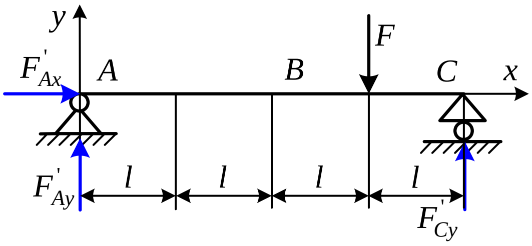
14.1./b Ugyanezen feladat másik megoldása (Castigliano tétel)

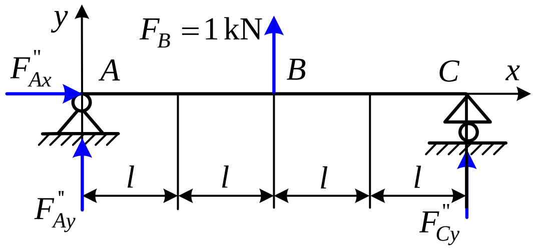


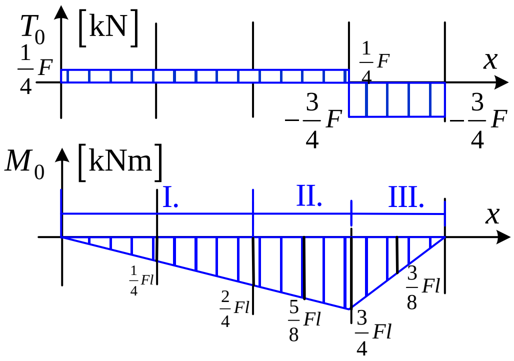
$l = 2\ \text{m}$,
$F = 32\ \text{kN}$,
$I_z = 50\,000\ \text{mm}^4$,
$E = 2{,}1 \cdot 10^5\ \text{MPa}$.

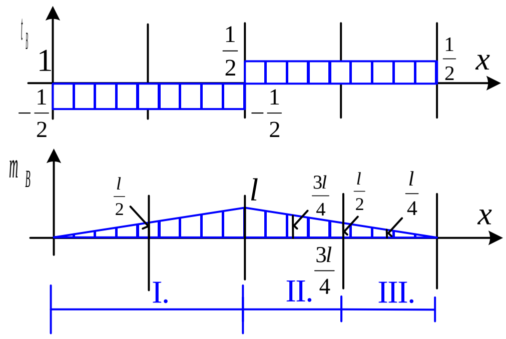
Megoldás:

a) Statikailag határozottá tétel más módon:









b) Kinematikai előírás: $v_B = 0$ (Castigliano-tétel)

$$v_B = \frac{\partial U}{\partial F_{By}} = 0 \qquad U = \frac{1}{2}\int_{(4l)} \frac{\left(M_0 + F_{By} m_B\right)^2}{I_z E} dx \qquad \Rightarrow F_{By} = -\frac{\int M_0 m_B\, dx}{\int m_B^{\ 2}\, dx}$$

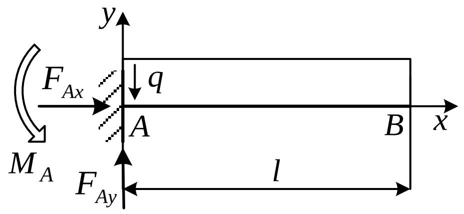
$$\int_{(4l)} M_0 m_B\, dx = \frac{2l}{6}\left[0\cdot 0 + 4\left(-\frac{Fl}{4}\right)\frac{l}{2} + \left(-\frac{2Fl}{4}\right)l\right] + \frac{l}{6}\left[\left(-\frac{2Fl}{4}\right)l + 4\left(-\frac{5Fl}{8}\right)\frac{3}{4}l + \left(-\frac{3Fl}{4}\right)\frac{l}{2}\right] +$$
$$+\frac{l}{6}\left[\left(-\frac{3Fl}{4}\right)\frac{l}{2} + 4\left(-\frac{3Fl}{8}\right)\frac{l}{4} + 0\cdot 0\right] = -\frac{22l^3}{24}F$$

$$\int_{(4l)} m_B^{\ 2} dx = \frac{2l}{6}\left[0^2 + 4\left(\frac{l}{2}\right)^2 + l^2\right] + \frac{2l}{6}\left[l^2 + 4\left(\frac{l}{2}\right)^2 + 0^2\right] = \frac{4l^3}{3}$$

$$F_{By} = -\frac{\int M_0 m_B\, dx}{\int m_B^{\ 2}\, dx} = -\frac{-\frac{22l^3}{24}F}{\frac{4l^3}{3}} = +\frac{22}{32}F\,(\uparrow) \quad \Rightarrow \qquad F_{By} = \frac{22}{32}32 = 22\ \text{kN}\,(\uparrow).$$

Az eredmény $F_{By} = 22\ \text{kN}\,(\uparrow)$, természetesen megegyezik az előző megoldással.

14.2. Statikailag határozott tartó lehajlása, keresztmetszet szögelfordulása (Castigliano tétel)



Adott: l, q, E, I_z.

Feladat:

a) A rúd B jelű keresztmetszeténél az S pont y irányú v_B elmozdulásának kiszámítása.

b) A rúd B jelű keresztmetszetének z tengely körüli φ_{Bz} szögelfordulásának kiszámítása.

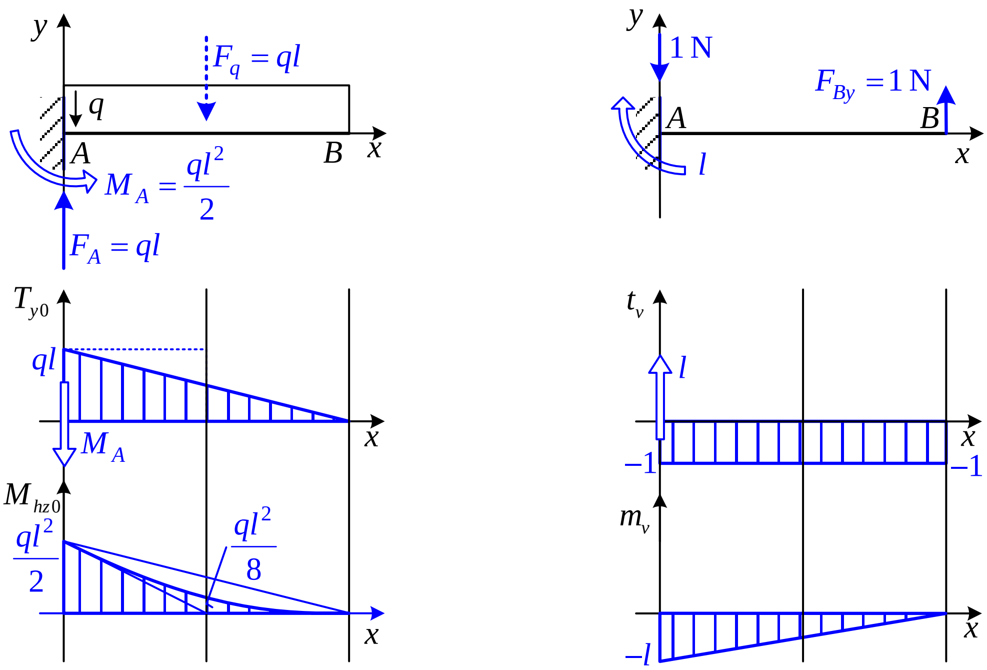
Megoldás:

a) A rúd B jelű keresztmetszeténél az S pont (a középvonal B pontja) y irányú v_B elmozdulásának kiszámítása. Castigliano-tétel alkalmazása: $U \approx U_H$

Az igénybevételek: $T_y = T_{y0} + F_{By} t_v$, és $M_{hz} = M_{hz0} + F_{By} m_v$.

$$v_B = \frac{\partial U}{\partial F_{By}}\bigg|_{F_{By}=0} = \frac{\partial}{\partial F_{By}}\left[\int_{(l)} \frac{\left(M_{hz0} + F_{By} m_v\right)^2}{2 I_z E} dx\right]\Bigg|_{F_{By}=0} = \frac{1}{I_z E}\left[\int_{(l)} \left(M_{hz0} + F_{By} m_v\right) m_v dx\right]\Bigg|_{F_{By}=0} = \frac{1}{I_z E}\int_{(l)} M_{hz0} m_v dx$$

Az eredeti terhelés igénybevételi ábrái: Az $F_{By} = 1 N$ igénybevételi ábrái:



A B rúdvég elmozdulás kiszámítása: $v_B = \frac{1}{I_z E}\int_{(l)} M_{hz0} m_v dx$

$$\int_{(l)} M_{hz0} m_v\, dx = \frac{l}{6}\left[\frac{ql^2}{2}(-l) + 4\frac{ql^2}{8}\left(-\frac{l}{2}\right) + 0\cdot 0\right] = -\frac{3ql^4}{8} \quad \Rightarrow \quad v_B = -\frac{ql^4}{8 I_z E}(\downarrow);$$

b) A rúd B jelű keresztmetszetének x tengely körüli φ_B szög-elfordulásának kiszámítása.

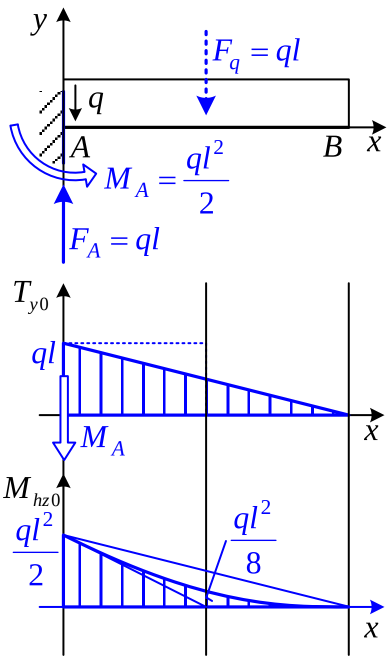
Castigliano-tétel alkalmazása: $U \approx U_H$

Az igénybevételek: $T_y = T_{y0} + F_{By} t_v$, és $M_{hz} = M_{hz0} + M_{Bz} m_v$.

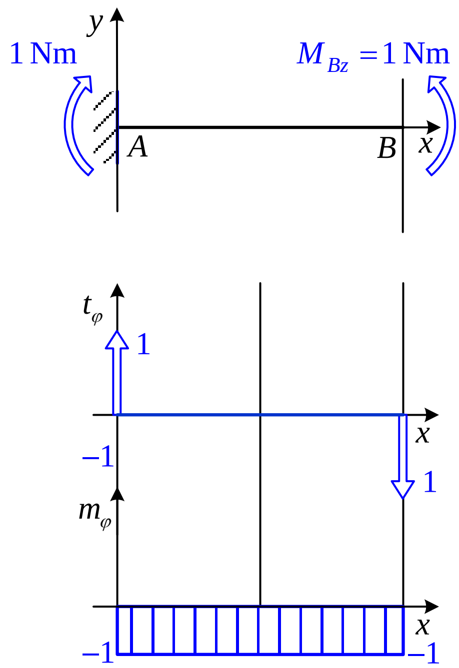
$$\varphi_B = \left.\frac{\partial U}{\partial M_{Bz}}\right|_{M_{Bz}=0} = \frac{\partial}{\partial M_{Bz}} \left.\left[\int_{(l)} \frac{\left(M_{hz0} + M_{Bz} m_\varphi\right)^2}{2 I_z E} dx \right]\right|_{M_{Bz}=0} =$$

$$= \frac{1}{I_z E} \left.\left[\int_{(l)} \left(M_{hz0} + M_{Bz} m_\varphi\right) m_v dx \right]\right|_{M_{Bz}=0} = \frac{1}{I_z E} \int_{(l)} M_{hz0} m_\varphi dx$$

Az eredeti terhelés igénybevételi ábrái:



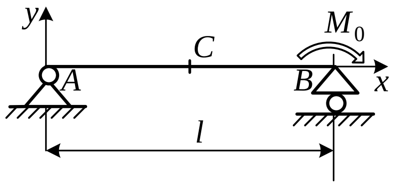
Az $M_{Bz} = 1 Nm$ igénybevételi ábrái:



A B rúdvég elmozdulás kiszámítása: $\varphi_{Bz} = \frac{1}{I_z E} \int_{(l)} M_{hz0} m_\varphi dx$

$$\int_{(l)} M_{hz0} m_\varphi \, dx = \frac{l}{6} \left[\frac{ql^2}{2}(-1) + 4\frac{ql^2}{8}(-1) + 0 \right] = -\frac{ql^3}{6} \quad \Rightarrow \quad \varphi_{Bz} = -\frac{ql^3}{6 I_z E} (\circlearrowright).$$

14.3. Rúdszerkezet lehajlása, szögelfordulása: (megoldás Castigliano tétellel)



Adott:

$l = 1{,}2\ \mathrm{m}$,

$M_0 = 3{,}1\ \mathrm{kNm}$,

$I_z = 50\,000\ \mathrm{mm}^4$,

$E = 2{,}1 \cdot 10^5\ \dfrac{\mathrm{N}}{\mathrm{mm}^2}$.

Feladat:

a) A rúd C jelű keresztmetszeténél az S pont y irányú v_C elmozdulásának kiszámítása.

b) A rúd B jelű keresztmetszetének z tengely körüli φ_{Bz} szög-elfordulásának kiszámítása.

Megoldás:

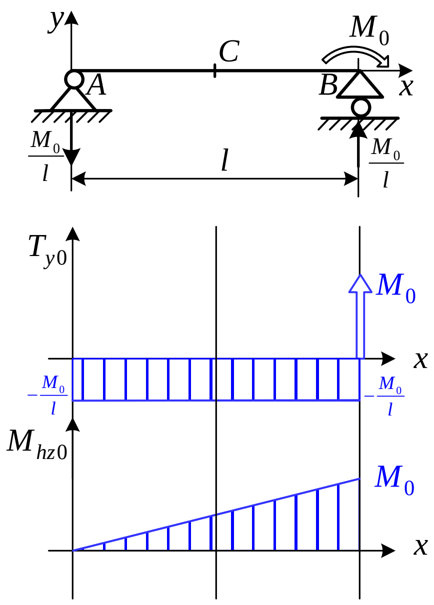
a) A rúd C jelű keresztmetszeténél az S pont y irányú v_C elmozdulásának kiszámítása.

Castigliano-tétel alkalmazása: $U \approx U_H$

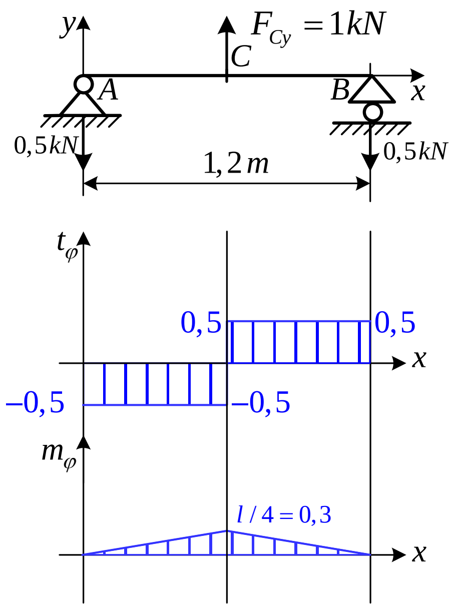
Az igénybevételek: $T_y = T_{y0} + F_{Cy} t_v$, és $M_{hz} = M_{hz0} + F_{Cy} m_v$.

$$v_C = \left.\frac{\partial U}{\partial F_{Cy}}\right|_{F_{Cy}=0} = \frac{\partial}{\partial F_{Cy}}\left[\int_{(l)} \frac{\left(M_{hz0} + F_{Cy} m_v\right)^2}{2 I_z E} dx\right]_{F_{Cy}=0} = \frac{1}{I_z E}\left[\int_{(l)} \left(M_{hz0} + F_{Cy} m_v\right) m_v dx\right]_{F_{Cy}=0} = \frac{1}{I_z E}\int_{(l)} M_{hz0} m_v dx$$

Az eredeti terhelés igénybevételi ábrái:



Az $F_{Cy} = 1kN$ igénybevételi ábrái:



A C keresztmetszet elmozdulás kiszámítása: $v_C = \dfrac{1}{I_z E}\displaystyle\int_{(l)} M_{hz0} m_v dx$

$$\int_{(l)} M_{hz0} m_v\, dx = \frac{\frac{l}{2}}{6}\left[0 + 4\frac{M_0}{4}\frac{l}{8} + \frac{M_0}{2}\frac{l}{4}\right] + \frac{\frac{l}{2}}{6}\left[\frac{M_0}{2}\frac{l}{4} + 4\frac{3M_0}{4}\frac{l}{8} + 0\right] =$$

$$=\frac{l}{12}\left[\frac{M_0 l}{8}+\frac{M_0 l}{8}\right]+\frac{l}{12}\left[\frac{M_0 l}{8}+\frac{3M_0 l}{8}\right]=\frac{M_0 l^2}{16} \quad \Rightarrow$$

$$v_C=\frac{1}{I_z E}\frac{M_0 l^2}{16}=\frac{1}{5\cdot 10^4\cdot 2{,}1\cdot 10^5}\frac{3{,}1\cdot 10^6\cdot\left(1{,}2\cdot 10^3\right)^2}{16}=26{,}57\,mm(\uparrow)$$

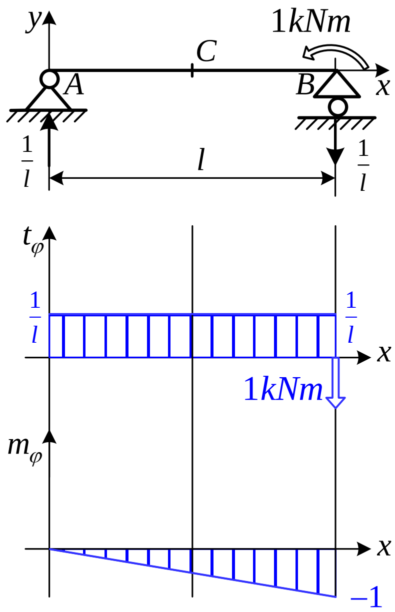
A C keresztmetszet F_{Cy} irányába mozdul el, vagyis fölfelé.

b) A rúd B jelű keresztmetszetének z tengely körüli φ_{Bz} szög-elfordulásának kiszámítása.
Castigliano-tétel alkalmazása: $U \approx U_H$
Az igénybevételek: $T_y = M_{Bz} t_\varphi$, és $M_{hz} = M_{Bz} m_\varphi$.

$$\varphi_{Bz}=\left.\frac{\partial U}{\partial M_{Bz}}\right|_{M_{Bz}=-M_0}=\left.\frac{\partial}{\partial M_{Bz}}\left[\int_{(l)}\frac{\left(M_{Bz}m_\varphi\right)^2}{2I_z E}dx\right]\right|_{M_{Bz}=-M_0}=$$

$$=\left.\frac{1}{I_z E}\left[\int_{(l)}\left(M_{Bz}m_\varphi\right)m_\varphi dx\right]\right|_{M_{Bz}=-M_0}=\frac{1}{I_z E}\left[-M_0\int_{(l)}m_\varphi^2 dx\right]=-\frac{M_0}{I_z E}\int_{(l)}m_\varphi^2 dx$$

Az $M_{Bz}=1kNm$ igénybevételi ábrái:



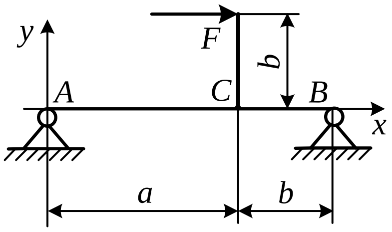
A B rúdvég szögelfordulás kiszámítása: $\varphi_{Bz}=-\frac{M_0}{I_z E}\int_{(l)}m_\varphi^2 dx$

$$\int_{(l)}m_\varphi^2 dx=\frac{l}{6}\left[0+4\left(-\frac{1}{2}\right)^2+(-1)^2\right]=\frac{2l}{6}=\frac{l}{3} \quad \Rightarrow$$

$$\varphi_{Bz}=-\frac{M_0}{I_z E}\frac{l}{3}=-\frac{3{,}1\cdot 10^6\cdot 1200}{5\cdot 10^4\cdot 2{,}1\cdot 10^5\cdot 3}=-0{,}118\,rad \quad \Rightarrow \quad \varphi_{Bz}=-\frac{0{,}118}{\pi}180^0=-6{,}76^0$$

A B keresztmetszet az óramutató járásával megegyező irányában (M_0 irány) mozdul el.

14.4. Statikailag határozatlan tartó igénybevételeinek meghatározása: (Castigliano tétel)



Adott: $a = 2\text{ m}$, $b = 1\text{ m}$, $I_z = 40000\text{ mm}^4$,

$A = 5000\text{ mm}^2$, $F = 45\text{ kN}$, $E = 2\cdot 10^5\text{ MPa}$.

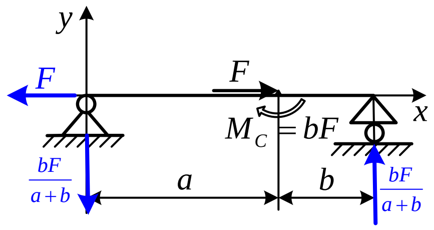
Feladat:

Határozza meg a tartó támasztó erőrendszerét!

Statikai ismeretlenek: F_{Ax}, F_{Ay}, F_{By}, F_{By}. Statikai egyenletek száma: 3 db.

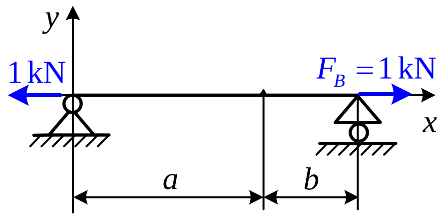
Megoldás:

a) Statikailag határozottá tétel:



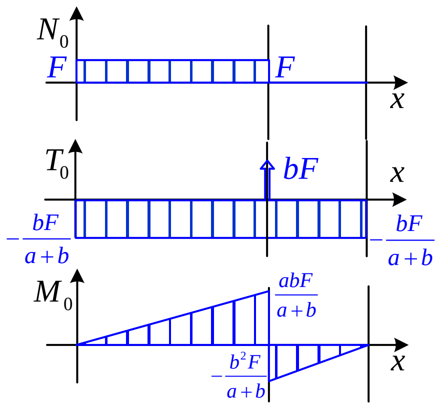
$$M_a = 0 = -M_C + (a+b)F'_{By}$$

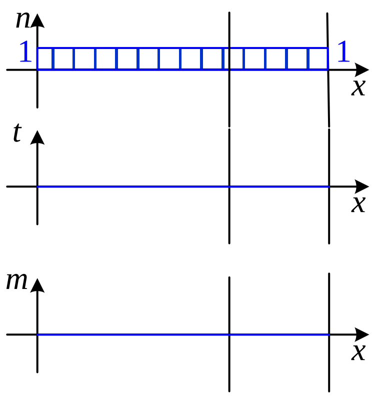
$$F'_{By} = \frac{bF}{a+b}(\uparrow),\ F'_{Ay} = \frac{bF}{a+b}(\downarrow),\ F'_{Ax} = -F$$



$$M_a = 0$$

$$F''_{Ax} = -1\text{kN},\ F''_{Ay} = 0\text{kN},\ F''_{By} = 0\text{kN}$$





$$u_B = \frac{\partial U}{\partial F_{Bx}} = 0, \qquad U = \frac{1}{2}\int_{(4l)} \frac{(M_0 + F_{Bx}m)^2}{I_z E}dx + \frac{1}{2}\int_{(4l)} \frac{(N_0 + F_{Bx}n)^2}{AE}dx, \qquad m = 0 = const$$

$$u_B = \frac{\partial U}{\partial F_{Bx}} = \frac{1}{I_z E}\int_{(4l)} (M_0 + F_{Bx}m)m\,dx + \frac{1}{AE}\int_{(4l)} (N_0 + F_{Bx}n)n\,dx = 0 \ \Rightarrow\ F_{Bx} = -\frac{\int N_0 n\,dx}{\int n^2\,dx}$$

$$\int_{(4l)} N_0 n\,dx = \frac{a}{6}(F + 4F + F) = aF, \quad \int_{(4l)} n^2\,dx = \frac{a+b}{6}(1 + 4\cdot 1 + 1) = a+b \quad \Rightarrow F_{Bx} = -\frac{aF}{a+b}$$

$$F_{Bx} = = -\frac{2\cdot 45}{2+1} = -30\text{ kN}\,(\leftarrow),\ F_x = 0 = F_{Ax} + F + F_{Bx} \quad \Rightarrow\ F_{Ax} = -45 + 30 = -15\text{ kN}\,(\leftarrow)$$

$$F_{Ay} = -\frac{bF}{a+b} = -\frac{1\cdot 45}{2+1} = -9\text{ kN}\,(\downarrow),\ F_{By} = \frac{bF}{a+b} = 9\text{ kN}\,(\uparrow).$$